REPUBLIQUE TUNISIENNE

MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN – SESSION 2025

Mathématiques – Série Homothétie

Durée : 3h   Coefficient : –

Exercice 1

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $AB = 4$ cm et I le milieu du segment $[AB]$.

1. Soit h l'homothétie telle que $h(B) = I$ et $h(C) = O$.
   (a) Montrer que h est de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
   (b) Construire le point $J = h(O)$ puis montrer que $(BO) \parallel (IJ)$.
2. Soit ξ le cercle de centre B passant par O.
   (a) Déterminer puis construire le cercle ξ' image du cercle ξ par l'homothétie h.
   (b) Montrer que (AC) est tangente à ξ'.
3. La droite (OB) recoupe le cercle ξ en un point E et coupe $[BC]$ en R. La droite (IJ) recoupe le cercle ξ' en un point F.
   (a) Déterminer $h(OB)$.
   (b) En déduire que $h(E) = F$.
4. Soit $M = (BC) \cap (EF)$ et $N = (OI) \cap (EF)$.
   (a) Montrer que $h(M) = N$.
   (b) En déduire que F est le milieu du segment $[MN]$.
5. Soit
$$C_1 = \left\{ P \mid \|2\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PD}\| = 6\sqrt{2} \right\}$$
   et $Q = h(P)$.
   (a) Vérifier que $E \in C_1$ et $R \in C_1$.
   (b) Montrer que Q décrit le cercle ξ'.

Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $BC = 8$ cm, $AC = 7$ cm, $AB = 5$ cm et I le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(C, 1)$.

On définit $h_1 : \begin{cases} P \mapsto P \\ M \mapsto M' \quad \text{tel que } \overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \end{cases}$.

1. (a) Montrer que h_1 est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
   (b) Construire le centre de h_1.
2. La parallèle à la droite (BC) passant par I coupe le segment $[AB]$ en J. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$.
   (a) Déterminer $h(B)$ et $h(C)$.
   (b) Montrer que $h(BC) = (IJ)$ et que $IJ = 2$ cm.
   (c) Déterminer $h(AB)$ avec justification.
3. Soit $K = B * C$ et la droite (AK) coupe le segment $[IJ]$ en E. Montrer que $h(K) = E$.
4. Soit M un point variable sur ξ, le cercle de diamètre $[BC]$, et $h(M) = M'$. Montrer que M' décrit un cercle que l'on précisera.

Exercice 3

On considère trois points A, B, C tels que $AB = 4$ et :

- B est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(C, 2)$;
- (C) est le cercle de diamètre $[AB]$;
- (C') est le cercle de diamètre $[AC]$;
- $M \in (C)$ et (AM) recoupe (C') en N ;
- Les droites (CM) et (BN) se coupent en I.

1. Soit h l'homothétie de centre A telle que $h(B) = C$. Montrer que son rapport est $\frac{3}{2}$.
2. Prouver que l'image du cercle (C) par h est le cercle (C').
3. (a) Déterminer $h(M)$.
   (b) En déduire que les droites (BM) et (CN) sont parallèles.
4. Soit h' l'homothétie de centre I telle que $h'(B) = N$.
   (a) Déterminer l'image de la droite (BM) par h'.
   (b) En déduire $h'(M)$.
5. Soit G le centre de gravité du triangle ABM. Déterminer l'ensemble des points G lorsque M varie sur le cercle (C) privé de A et B.